Hullámterjedési jelenségek csatolt oszcillátor-rendszerekben

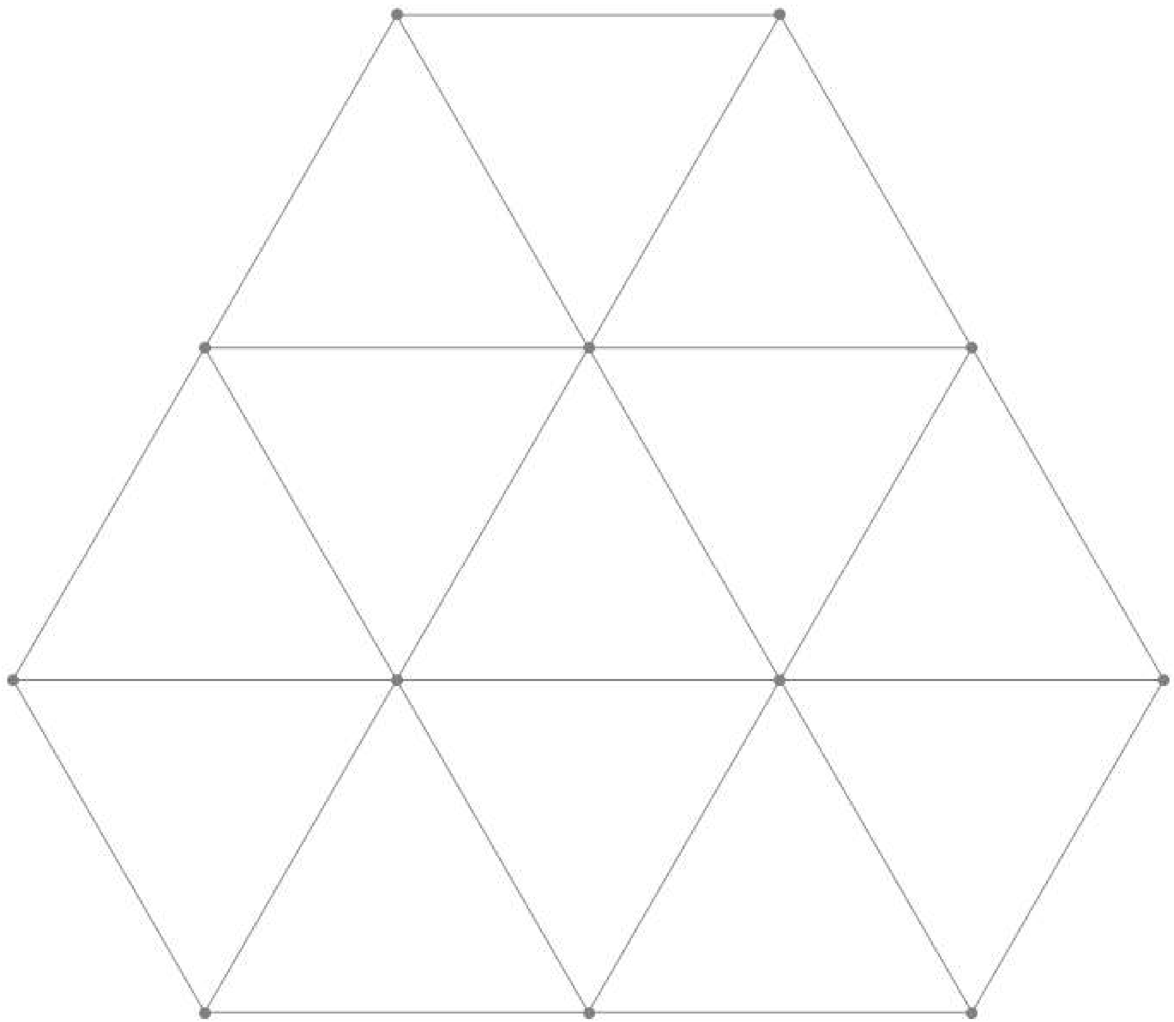
Szilvási Ádám, Fizika BSc
2009. Atomfizikai Tanszék
Témavezető: Dávid Gyula

A bemutató vázlata

1. Motiváció
2. Háromszögrács rezgései
    1. Mozgásegyenlet
    2. Sajátértékprobléma
    3. Kezdőfeltételek illesztése
    4. Megoldás
3. Diszkusszió

Motiváció

- Elemi fizikai alapprobléma: lineáris lánc rezgései
  - Különböző kezdőfeltételekkel, határfeltételekkel vizsgálták már
  - Kialakult formalizmus
- Kétdimenziós rács kezdeti érték problémáját kevésbé vizsgálták
  - Négyszögrács szétcsatolódik lineáris rendben



Háromszögrács rezgései

Egyenlő oldalú háromszögrács

Azonos tömegű golyók

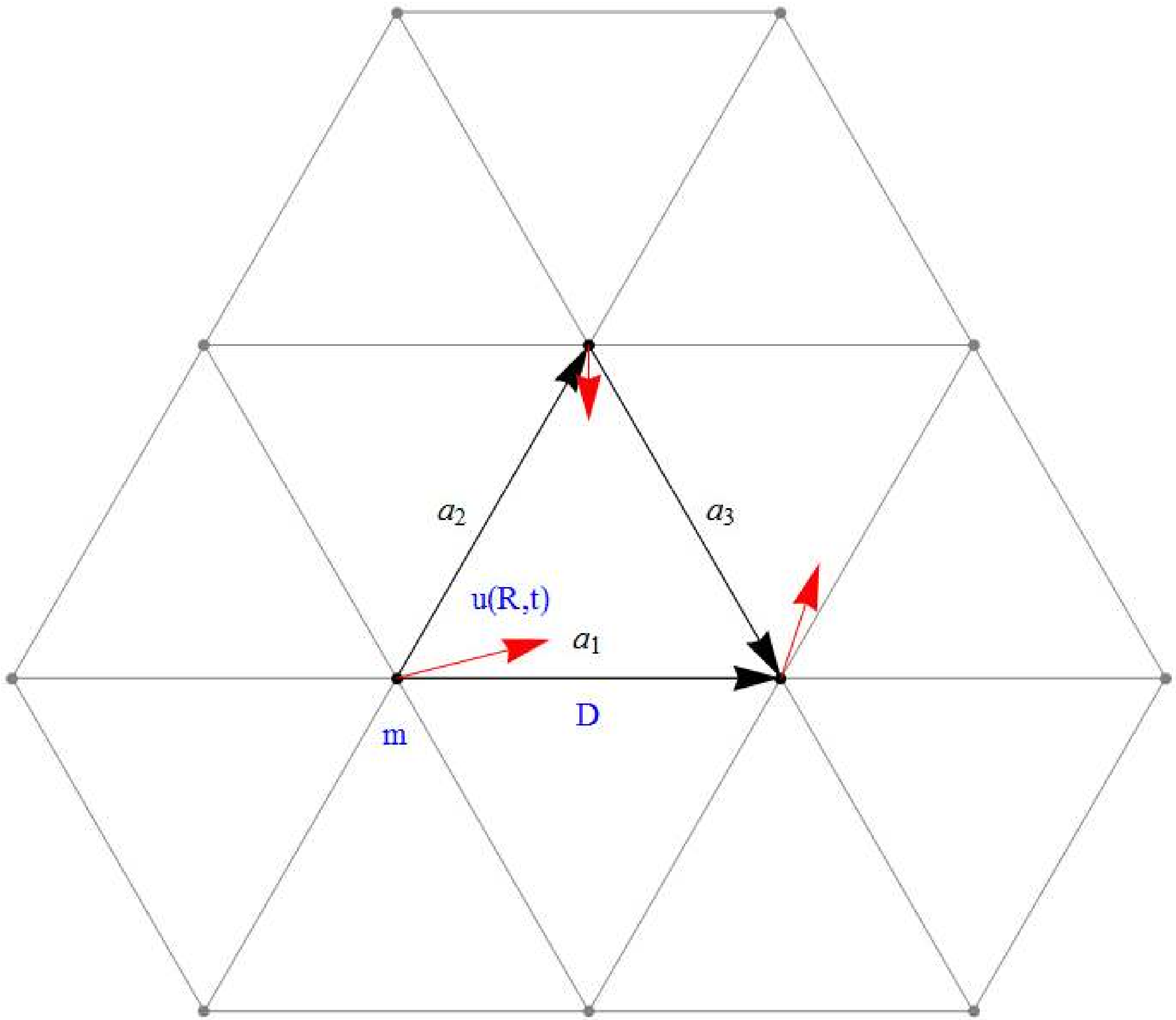
A golyókat ideális rugók kötik össze

Véges, N darab golyóból áll

Periodikus határfeltétel

Háromszögrács rezgései

- Kétdimenziós csatolt oszcillátor-rendszer
- Stratégia:
  - Mozgásegyenlet meghatározása
  - Ekvivalens sajátértékprobléma megoldása
  - Általános megoldás felírása lineárkombinációkkal
  - Együtthatók illesztése a kezdőfeltételekhez
    - Minden oszcillátor a nyugalmi helyzetében van, kivéve egyet
    - Minden oszcillátor sebessége nulla



A rács geometriája

A rácsállandó a

A golyók tömege m

A rugók direkciós állandója D

A pontok helyét az $R=n_1*a_1+n_2*a_2$ vektor írja le

A pontok elmozdulását az u vektor írja le

Mozgásegyenlet

- A golyó elmozdulásának a rugó irányára vett vetületét vesszük figyelembe
- A szimmetrikus kezelés miatt bevezetjük a bázisvektorok különbségét, mint segédvektort

$$
\begin{aligned}
m\ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{R},t) = D\frac{\mathbf{a}_1\circ\mathbf{a}_1}{a^2}(\mathbf{u}(\mathbf{R}+\mathbf{a}_1,t)-\mathbf{u}(\mathbf{R},t))+ \\
+D\frac{\mathbf{a}_1\circ\mathbf{a}_1}{a^2}(\mathbf{u}(\mathbf{R}-\mathbf{a}_1,t)-\mathbf{u}(\mathbf{R},t))+ \\
+D\frac{\mathbf{a}_2\circ\mathbf{a}_2}{a^2}(\mathbf{u}(\mathbf{R}+\mathbf{a}_2,t)-\mathbf{u}(\mathbf{R},t))+ \\
+D\frac{\mathbf{a}_2\circ\mathbf{a}_2}{a^2}(\mathbf{u}(\mathbf{R}-\mathbf{a}_2,t)-\mathbf{u}(\mathbf{R},t))+ \\
+D\frac{\mathbf{a}_3\circ\mathbf{a}_3}{a^2}(\mathbf{u}(\mathbf{R}+\mathbf{a}_3,t)-\mathbf{u}(\mathbf{R},t))+ \\
+D\frac{\mathbf{a}_3\circ\mathbf{a}_3}{a^2}(\mathbf{u}(\mathbf{R}-\mathbf{a}_3,t)-\mathbf{u}(\mathbf{R},t))
\end{aligned}
$$

Mozgásegyenlet

- A mozgásegyenlet rövidebb alakja:

$$m\ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{R},t) = D\sum_{i=1}^{3}\frac{(\mathbf{a}_i \circ \mathbf{a}_i)}{a^2}\big(\mathbf{u}(\mathbf{R}+\mathbf{a}_i,t) + \mathbf{u}(\mathbf{R}-\mathbf{a}_i,t) - 2\mathbf{u}(\mathbf{R},t)\big)$$

- Fejtsük ki síkhullámok szerint a megoldást! k a reciprokrács pontja, és eleme a Brillouin zónának, $\mathrm{u}_n(\mathrm{k})$ pedig a síkhullám kifejtési együtthatója

$$\mathbf{u}_n^{(\mathbf{k})}(\mathbf{R},t) = \mathbf{u}_n(\mathbf{k})e^{i(\mathbf{k}\mathbf{R}-\omega_n(\mathbf{k})t)} \qquad n = \{1,2\}$$

- Ezt behelyettesítjük, és leválasztjuk a síkhullámot:

$$-m\omega_n^2(\mathbf{k})\mathbf{u}_n(\mathbf{k}) = D\sum_{i=1}^{3}\frac{(\mathbf{a}_i \circ \mathbf{a}_i)}{a^2}\big(\underbrace{e^{i(\mathbf{k}\mathbf{a}_i)} + e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{a}_i)}}_{2\cos\mathbf{k}\mathbf{a}_i} - 2\big)\mathbf{u}_n(\mathbf{k})$$

- Ez egy sajátértékprobléma, amely egyenértékű a mozgásegyenlettel

Sajátértékprobléma

- A sajátértékprobléma így írható:

$$\mathbf{D}\mathbf{u}_n(\mathbf{k}) = m\omega_n^2(\mathbf{k})\mathbf{u}_n(\mathbf{k})$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{k}) \equiv 2D\sum_{i=1}^{3}\frac{(\mathbf{a}_i \circ \mathbf{a}_i)}{a^2}(1-\cos\mathbf{k}\mathbf{a}_i)$$

- Ennek a megoldása $\epsilon_i = (1-\cos\mathbf{k}\mathbf{a}_i)$

$$\omega_{1,2}(\mathbf{k}) = \sqrt{\frac{D}{m}}\sqrt{\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3 \pm \sqrt{\epsilon_1^2-\epsilon_1\epsilon_2+\epsilon_2^2-\epsilon_1\epsilon_3-\epsilon_2\epsilon_3+\epsilon_3^2}}$$

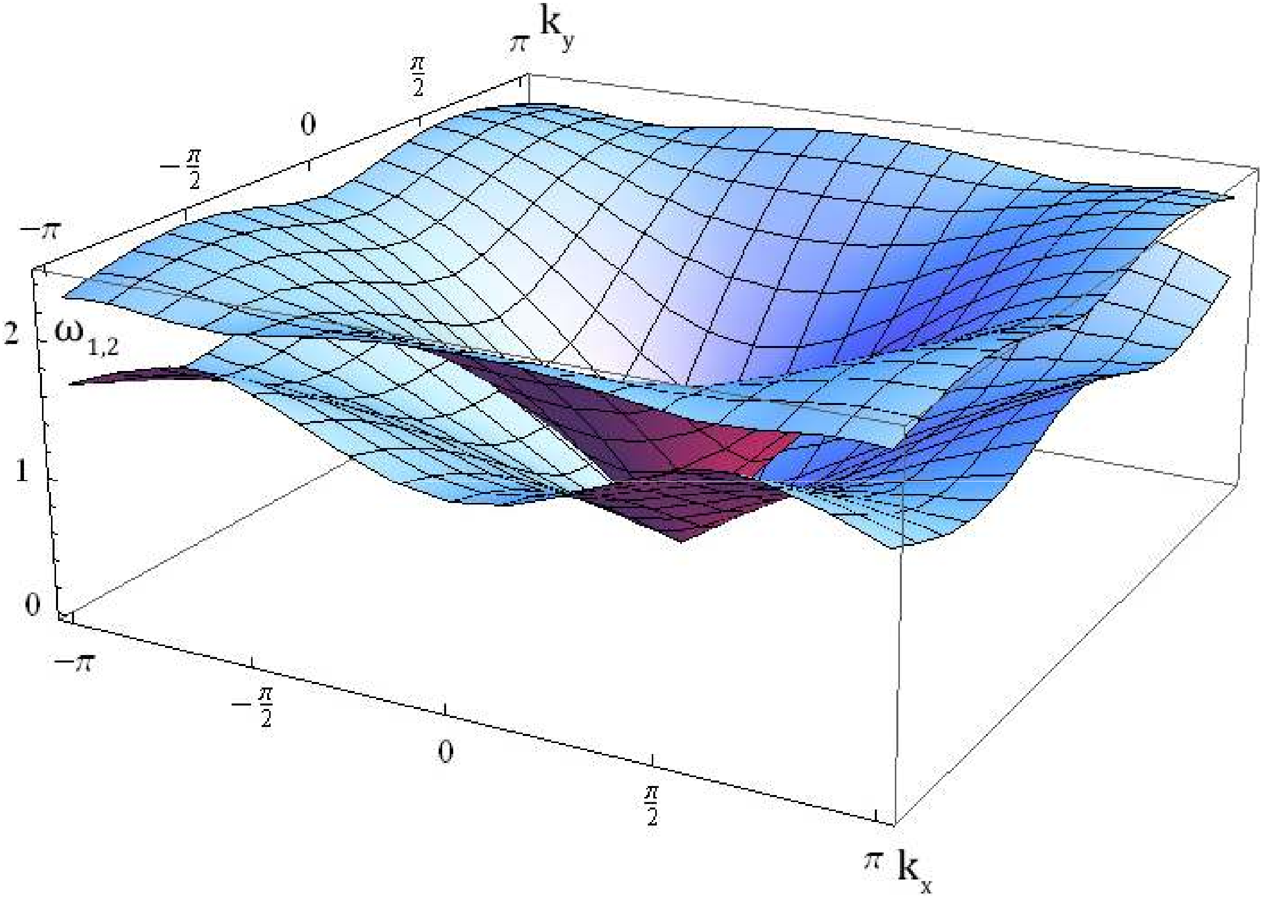
$$\mathbf{u}_{1,2}(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} \frac{2\epsilon_1-\epsilon_2-\epsilon_3\mp 2\sqrt{\epsilon_1^2-\epsilon_1\epsilon_2+\epsilon_2^2-\epsilon_1\epsilon_3-\epsilon_2\epsilon_3+\epsilon_3^2}}{\sqrt{3}(\epsilon_2-\epsilon_3)} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sajátértékprobléma

- A későbbiekben hasznos lesz a sajátvektor rácsvektorok szerinti felbontása:

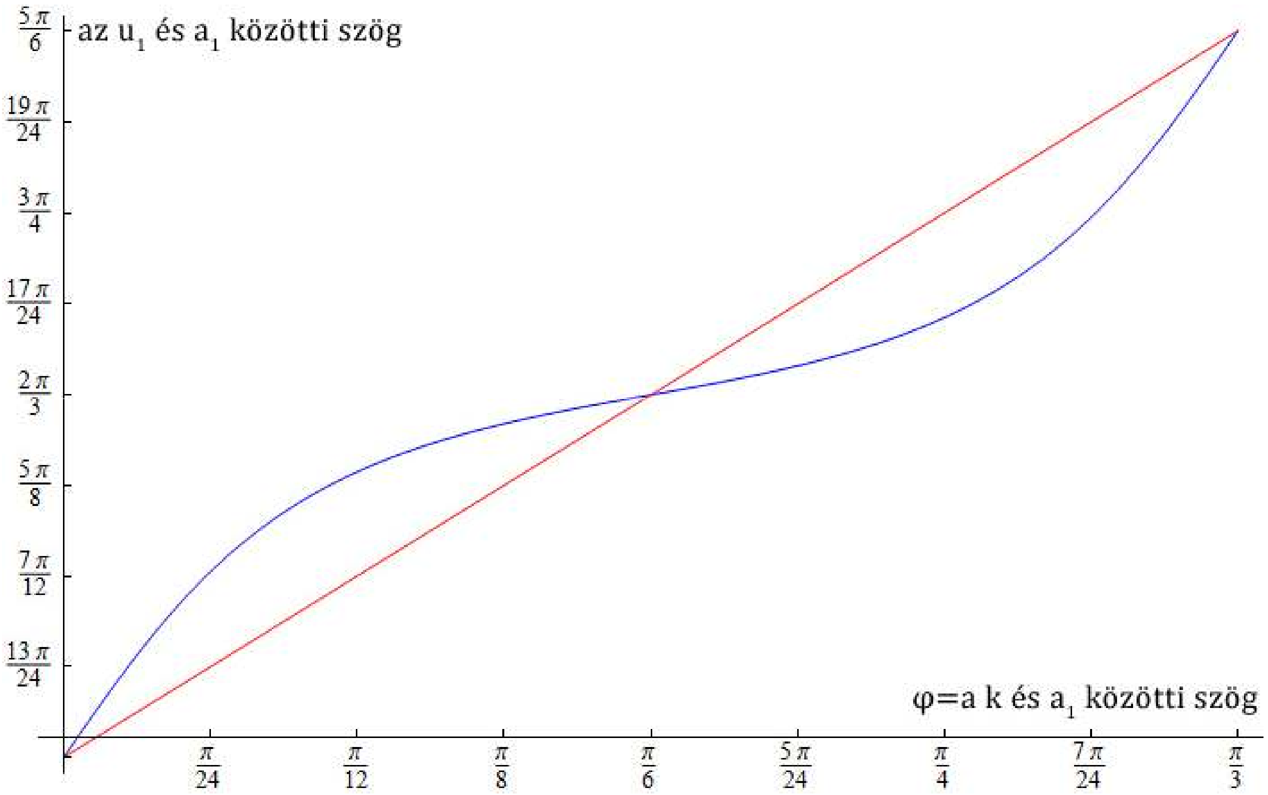
$$\mathbf{u}_n(\mathbf{k}) = \frac{2}{\sqrt{3}}\gamma_n(\mathbf{k})\mathbf{a}_1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\mathbf{a}_2$$

$$\gamma_n(\mathbf{k}) = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2 \mp \sqrt{\epsilon_1^2 - \epsilon_1\epsilon_2 + \epsilon_2^2 - \epsilon_1\epsilon_3 - \epsilon_2\epsilon_3 + \epsilon_3^2}}{\epsilon_2 - \epsilon_3}$$



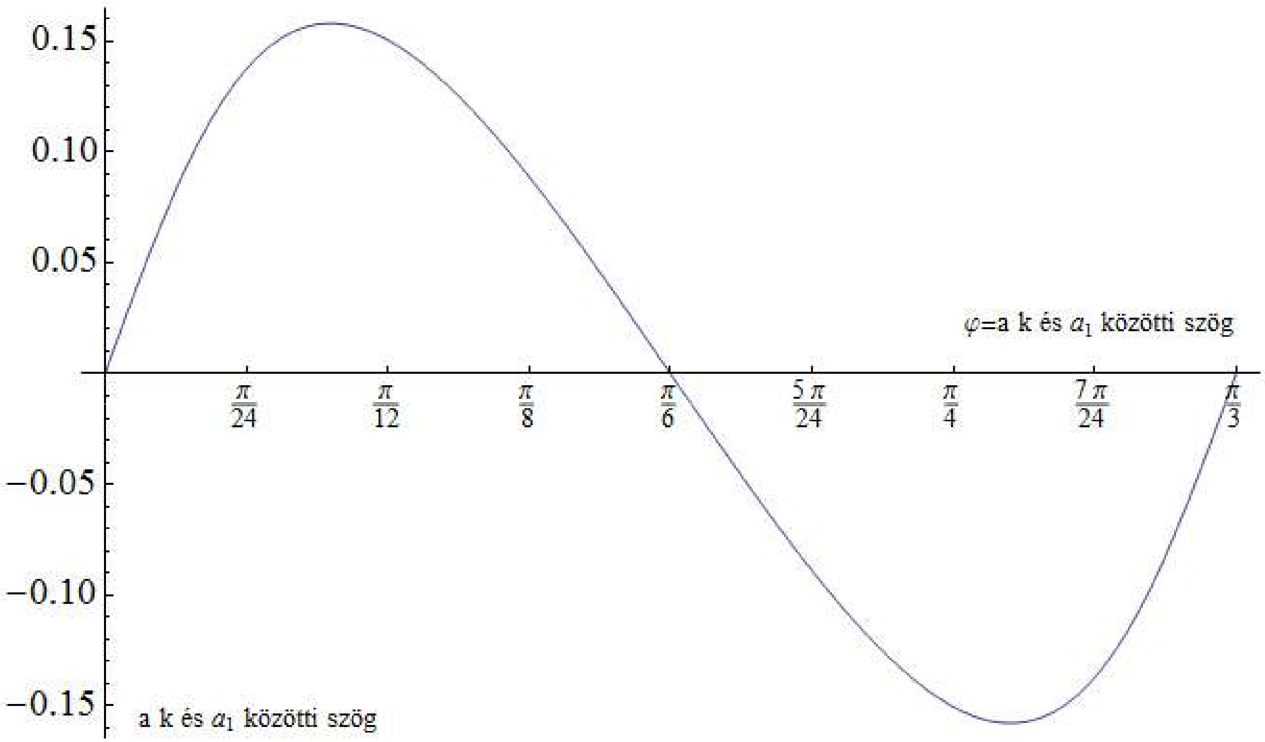
Diszperziós reláció

Az ábrán diszperziós reláció két ága látható. A hullámszám-vektor 1/a egységekben van felmérve a tengelyekre.



Az első sajátvektor

Az ábrán az 1-es sajátvektor szöge látható a hullámszám-vektor és az a1 vektor által közbezárt szög függvényében. Egy lineáris függvényt is ábrázoltam, hogy látszódjon a függvény trendje.



Az első sajátvektor

Ez az ábra a sajátvektor szögének a hullámszám-vektorétól való eltérését mutatja.

Kezdőfeltételek illesztése

- Felírhatjuk a teljes megoldást a sajátvektorokkal kifeszítve:

$$\mathbf{u}(\mathbf{R},t) = \sum_{\mathbf{k}\in Bz} (A_{\mathbf{k}} \cos(\mathbf{kR} - \omega_1(\mathbf{k})t) - B_{\mathbf{k}} \sin(\mathbf{kR} - \omega_1(\mathbf{k})t))\mathbf{u}_1(\mathbf{k}) +$$

$$+(C_{\mathbf{k}} \cos(\mathbf{kR} - \omega_2(\mathbf{k})t) - D_{\mathbf{k}} \sin(\mathbf{kR} - \omega_2(\mathbf{k})t))\mathbf{u}_2(\mathbf{k})$$

- Ennek a deriváltja:

$$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{R},t) = \sum_{\mathbf{k}\in Bz} \omega_1(\mathbf{k})(A_{\mathbf{k}} \sin(\mathbf{kR} - \omega_1(\mathbf{k})t) + B_{\mathbf{k}} \cos(\mathbf{kR} - \omega_1(\mathbf{k})t))\mathbf{u}_1(\mathbf{k}) +$$

$$+\omega_2(\mathbf{k})(C_{\mathbf{k}} \sin(\mathbf{kR} - \omega_2(\mathbf{k})t) + D_{\mathbf{k}} \cos(\mathbf{kR} - \omega_2(\mathbf{k})t))\mathbf{u}_2(\mathbf{k})$$

Kezdőfeltételek illesztése

- A kezdőfeltételeket ezekhez illesztjük:

$$\mathbf{u}(\mathbf{R}, t=0) = \mathbf{x}_0 \cdot \delta_{\mathbf{R},0} \qquad \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{R}, t=0) = 0$$

- Kihasználva, hogy:

$$\mathbf{u}_n(\mathbf{k}) = \mathbf{u}_n(-\mathbf{k}) \qquad \omega_n(\mathbf{k}) = \omega_n(-\mathbf{k})$$

$$\mathbf{u}_1(\mathbf{k})\mathbf{u}_2(\mathbf{k}) = 0$$

Kezdőfeltételek illesztése

- Ezek segítségével kifejezhetők az együtthatók:

$$A_{\mathbf{k}} = \frac{\alpha - \beta\gamma_2(\mathbf{k})}{2N/\sqrt{3}(\gamma_1(\mathbf{k}) - \gamma_2(\mathbf{k}))}$$

$$C_{\mathbf{k}} = \frac{\beta\gamma_1(\mathbf{k}) - \alpha}{2N/\sqrt{3}(\gamma_1(\mathbf{k}) - \gamma_2(\mathbf{k}))}$$

$$B_{\mathbf{k}} = 0 \qquad \forall k$$

$$D_{\mathbf{k}} = 0 \qquad \forall k$$

A megoldás

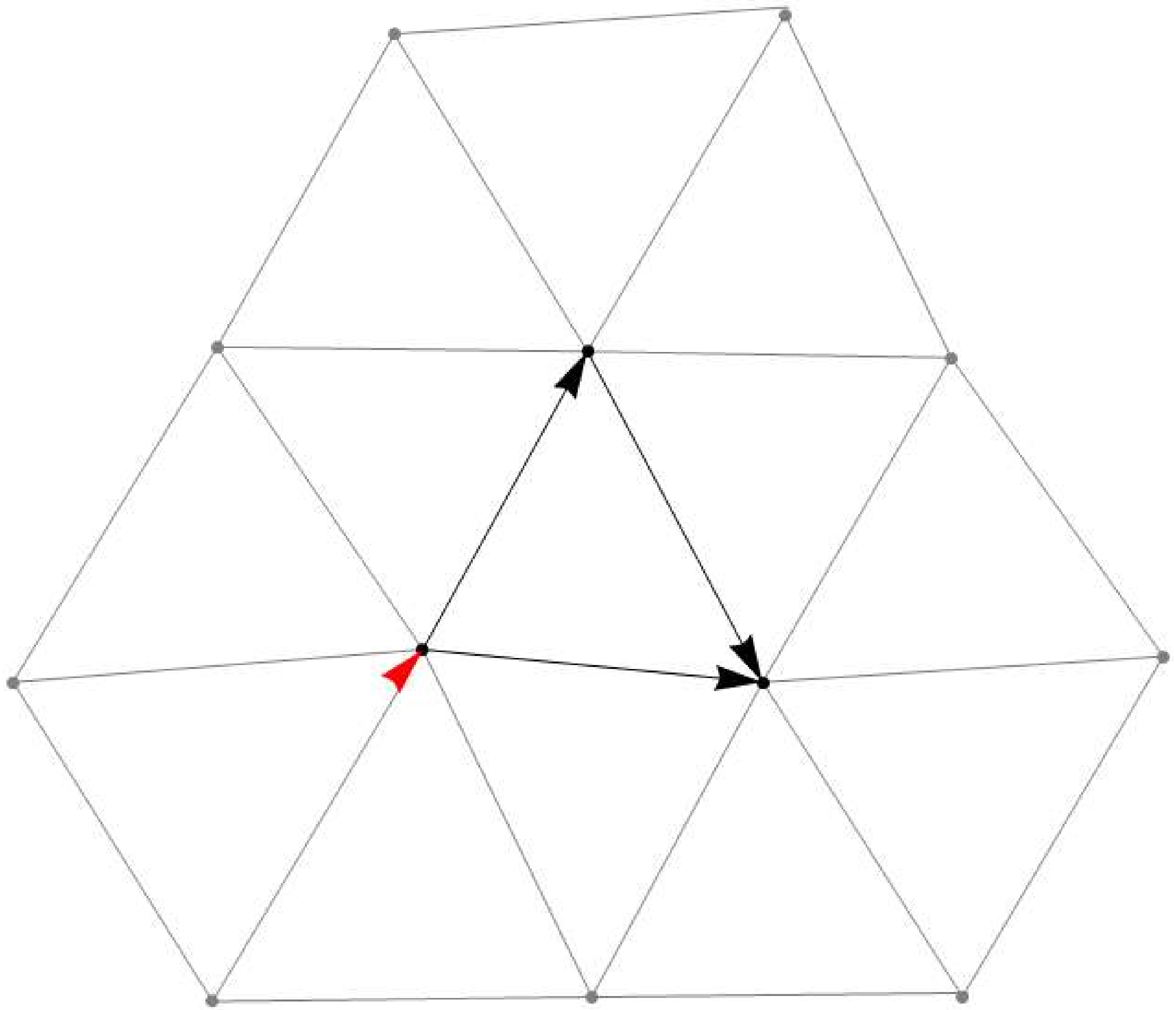
- Ezekkel a kezdőfeltételekkel megkaptuk a megoldás soralakját:

$$\mathbf{u}(\mathbf{R},t)=\sum_{\mathbf{k}\in Bz}\left[\alpha\left(\frac{\gamma_1(\mathbf{k})\cos(\mathbf{kR}-\omega_1(\mathbf{k})t)-\gamma_2(\mathbf{k})\cos(\mathbf{kR}-\omega_2(\mathbf{k})t)}{N(\gamma_1(\mathbf{k})-\gamma_2(\mathbf{k}))}\right)+\right.$$

$$\left.+\beta\left(\frac{\gamma_1(\mathbf{k})\gamma_2(\mathbf{k})(\cos(\mathbf{kR}-\omega_2(\mathbf{k})t)-\cos(\mathbf{kR}-\omega_1(\mathbf{k})t))}{N(\gamma_1(\mathbf{k})-\gamma_2(\mathbf{k}))}\right)\right]\mathbf{a}_1+$$

$$+\left[\alpha\left(\frac{\cos(\mathbf{kR}-\omega_1(\mathbf{k})t)-\cos(\mathbf{kR}-\omega_2(\mathbf{k})t)}{N(\gamma_1(\mathbf{k})-\gamma_2(\mathbf{k}))}\right)+\right.$$

$$\left.+\beta\left(\frac{\gamma_1(\mathbf{k})\cos(\mathbf{kR}-\omega_2(\mathbf{k})t)-\gamma_2(\mathbf{k})\cos(\mathbf{kR}-\omega_1(\mathbf{k})t)}{N(\gamma_1(\mathbf{k})-\gamma_2(\mathbf{k}))}\right)\right]\mathbf{a}_2$$



A megoldás numerikusan

Az ábra a következő paraméterekkel készült:

•Golyók száma (N) 100

•A golyó az elemi rácsvektorok felével lett kimozdítva:

- $\alpha=1/2$
- $\beta=1/2$

•t=5T idő után készült az ábra

•$T=2\pi*\sqrt{(m/D)}$ a rendszer időállandója

Köszönöm, hogy meghallgattak!

További jó hetet kívánok!